* on pose : $g(x) = \sin x$; $g'(x) = \cos x$; $g''(x) = -\sin x$

$g^{(3)}(x) = -\cos x$; $g^{(4)}(x) = \sin x$

On pourra remarquer que : $g^{(2n)}(x) = (-1)^n . \sin x$, pour $n \geq 1$

Montrons ce résultat par récurrence :

* pour $n = 1$

$g^{(2)}(x) = g''(x) = -\sin x = (-1)^1 . \sin x$ (vraie)

* supposons que : $g^{(2n)}(x) = (-1)^n . \sin x$

et montrons que : $g^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} . \sin x$

$g^{(2n)}(x) = (-1)^n . \sin x \Rightarrow g^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x.$

$\Rightarrow g^{(2n+2)}(x) = -(-1)^n \sin x \Rightarrow g^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$

Conclusion :

$g^{(2n)}(x) = (-1)^n . \sin x$, *par suite* $g^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x.$

De même on pose : $h(x) = \cos x$

$h^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$

$h^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$

Conclusion :

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n . [\cos x + \sin x]$, $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n [\cos x - \sin x]$

3) $f(x) = \sin 2x$

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n . 2^{2n} \sin 2x$, $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n . 2^{2n+1} \cos 2x$

(récurrence)

4) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

$f'(x) = -\left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right]$

$f''(x) = 2\left[\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\right]$

$f^{(3)}(x) = -6\left[\frac{1}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x+1)^4}\right]$

$f^{(4)}(x) = 24\left[\frac{1}{(x-1)^5} + \frac{1}{(x+1)^5}\right]$

Remarquons que pour $n \geq 1$: $f^{(n)}(x) = (-1)^n (n!)\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$

(DEMONSTRATION PAR RECURRENCE)

EXERCICE№9

1. La fonction : $x \mapsto \sin x$ est dérivable et strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ d'où f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$